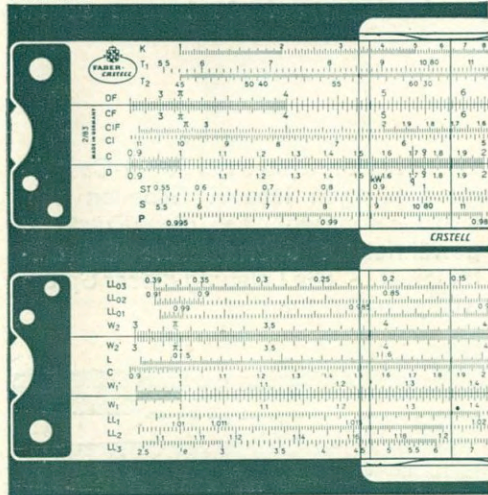


Der neue
doppelseitige Rechenstab
mit den
besonderen Vorzügen:

CASTELL novo-duplex 2/83

Vorderseite



Rückseite

Seine abgebrochenen Skalen (W_1, W_1', W_2, W_2') verleihen ihm die Genauigkeit eines 50 cm langen Rechenstabes

Die π -versetzten Skalen CF und DF sowie die reziproke π -Skala CIF erleichtern Tabellenrechnungen usw. wesentlich

Die zweiteilige Tangensskala T_1, T_2 reicht bis $84,3^\circ$ und macht Umwege über Kofunktion und Reziprokskala überflüssig

Die ST-Skala besitzt neuartige Korrekturmarken für trigonometrische Berechnungen

Ein wesentliches Merkmal des „Novo-Duplex“ sind seine 7 Exponentialskalen

Durch die besondere Schraubenkonstruktion der Metall-Laschen läßt sich die Schieberzügigkeit einstellen

Fortschritt
in
Ihrer
Hand



A. W. FABER - CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

7

1963



Rechenstab-Brief

Bitte besuchen Sie unseren Stand
auf der 7. DIDACTA
in Nürnberg, 7.-11. Juni 1963

Berichte und
Anregungen
für das
Stabrechnen

Aus dem Inhalt

- Seite 3 Der neue Rechenstab CASTELL-Novo-Duplex Nr. 2/83
im Kolbenmaschinenbau
von Professor Dr.-Ing. habil. H. Küttner
- Seite 7 Auflösung quadratischer Gleichungen
mit dem Rechenstab
von Dr. Josef Laub
- Seite 12 Das Rechnen mit komplexen Zahlen am Rechenstab
(Fortsetzung und Schluß der Abhandlung aus den
Rechenstabbriefen Nr. 3, 4, 5 und 6)
von Ing. H. Bachmann
- Seite 17 Hydraulische Berechnungen mit dem Castell-Duplex 2/82
von stud. Ing. Peter Hasselbeck



Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt.
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Copyright 1963 by A. W. FABER - CASTELL, Stein bei Nürnberg

Der neue Rechenstab CASTELL-Novo-Duplex Nr. 2/83 im Kolbenmaschinenbau

von o. Prof. Dr.-Ing. habil. H. Küttner

Eine verbesserte Anordnung der Skalen und die Erhöhung der Rechengenauigkeit machen den neuen Rechenstab für den Kolbenmaschinen-Konstrukteur besonders geeignet. Die von ihm zu lösenden Probleme stellen naturgemäß sehr verschiedene Anforderungen an seine Rechenhilfen, echte Fortschritte im Rechenstab-Bau aber zeigen ihre Vorteile am deutlichsten in den Fällen, in denen eine optimale Lösung durch mehrfach wiederholte Proberechnungen angestrebt werden muß.

Vor dieser Aufgabe steht der Konstrukteur im Kolbenmaschinenbau oft. Weder die Auslegung einer Maschine nach ihren Hauptabmessungen noch die Bestimmung der Abmessungen ihrer Organe, wie Lager, Steuerquerschnitte, Kühlflächen usw. können, außer für allererste Überschlagsrechnungen, nach einfachen Grundregeln bestimmt und in einem Zuge berechnet werden.

Schon die Grundkonzeption für die Lösung einer konstruktiven Aufgabe aus dem Kolbenmaschinenbau kann nur durch vergleichende Rechnungen optimal gewonnen werden. Die Fülle der konstruktiven Gestaltungsmöglichkeiten und die Vielfalt der Einflüsse zwingen aber dann auch für fast alle Konstruktions-Details immer wieder zu weiteren Vergleichen, probeweise geänderten Annahmen und damit zu einer schrittweisen Annäherung an die beste Lösung.

Für eine grundlegende Untersuchung kann man sich z. B. die Aufgabe stellen, einen verbrennungsmotorischen Arbeitsprozeß in einer geplanten Maschine schrittweise durch betriebsgerechte Wahl und Berechnung aller Temperaturen, Strömungsgeschwindigkeiten, Durchfluß- und Wärmeflußbeiwerte usw. in möglichst guter Annäherung an die Wirklichkeit durchzurechnen, um die Bestätigung für die richtige Berücksichtigung aller Einflußgrößen dann darin zu finden, daß der Rechnungsgang sich schließt, d. h. bei dem gleichen Zustand des Arbeitsmediums endet, mit dem man begonnen hatte.

Solche Rechnungen haben sich als außerordentlich wirtschaftlich erwiesen, weil sie die Anzahl kostspieliger Versuche, z. B. bei der Entwicklung neuer Motorentypen, wesentlich herabzusetzen erlauben. Jede Neuentwicklung im Kolbenmaschinenbau beruht deshalb heute auf einer engen Zusammenarbeit von Konstruktion, Versuch und Berechnung.

Auch bei durch eingehende Beschäftigung mit Verbrennungs-, Strömungs- und Energieumsetzungsprozessen geschulten Rechnern erfordern solche Verfahren natürlich eine häufige Wiederholung der Rechnungen mit geänderten Annahmen und immer besserer Annäherung an die Wirklichkeit. Dabei ist der Einsatz elektronischer Rechenmaschinen nur dann lohnend, wenn der Einfluß einer besonders großen Anzahl veränderlicher Randbedingungen untersucht werden muß. In sehr vielen Fällen ist Rechenstab-Arbeit viel wirtschaftlicher und besonders bei Verwendung eines Stabes wie des neuen CASTELL-Novo-Duplex völlig ausreichend genau.

Schon bei den immer wiederkehrenden einfachen Rechenvorgängen des Multiplizierens und Dividierens ohne erhöhten Genauigkeitsanspruch erweist sich der Aufbau der Vorderseite des neuen Rechenstabes mit den π -versetzten Skalen und der neu aufgenommenen reziproken π -versetzten Skala CIF auf dem Schieber als sehr vorteilhaft, lassen

sich doch meist 2 Rechenvorgänge mit nur einer Schiebereinstellung durchführen. Außerdem braucht man den Schieber nicht mehr durchzuschieben und kann bei der Aufstellung von Tabellen alle Werte auf einer Stabseite ablesen. Damit werden Irrtümer leichter ausgeschaltet.

Die neuen, insgesamt 50 cm langen, geteilten Wurzelskalen aber bieten auf dem nur 330 mm langen Rechenstab die Rechengenauigkeit eines doch recht unbequemen 50 cm-Stabes von mindestens 580 mm Länge. Dadurch wird ein rasches Rechenstab-Arbeiten möglich, wo bisher aus Gründen der geforderten Genauigkeit zur 4stelligen Logarithmentafel gegriffen werden mußte.

Für die häufig vorkommenden 3. Potenzen ergibt sich darüber hinaus bei Verwendung der Wurzelskalen W zusammen mit der Skala CI die Möglichkeit, eine dreimal höhere Genauigkeit als mit einem üblichen 25 cm-Stab mit einfacher Kubenskala zu erreichen. Der Wegfall der vertrauten Quadratskalen bedeutet keinen Nachteil, sondern durch das Quadrieren mit Übergang von den Wurzelskalen W_1 oder W_2 auf die 25 cm lange, bewegliche Grundskala C oder feste Grundskala D eine Erhöhung der Ablesegenauigkeit auf das Doppelte. Damit wird auch hier die Genauigkeit eines normalen 50 cm-Stabes erreicht.

Als erstes typisches Beispiel einer Rechnung aus dem Kolbenmaschinenbau sei die Bestimmung des thermischen Wirkungsgrades für ein ottomotorisches Arbeitsverfahren angeführt. Der wirkliche Prozeß im Motor wird von einer großen Zahl chemischer und physikalischer Vorgänge beeinflusst. Wenn man aber die grundsätzlichen Eigenschaften des Arbeitsverfahrens berücksichtigt, läßt sich der thermische Wirkungsgrad unter vereinfachenden Annahmen aus einem Vergleichsprozeß leicht bestimmen. Für den idealen Kreisprozeß des Ottomotors, der sich aus einer adiabatischen Verdichtung, einer isochoren Wärmezufuhr, einer adiabatischen Entspannung und einer isochoren Wärmeabfuhr zusammensetzt, hängt der thermische Wirkungsgrad nur vom Verdichtungsverhältnis ε und dem Adiabaten-Exponenten κ ab:

$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^\kappa - 1}$, während sich für einen Ausgangsdruck P_1 , der bei nicht aufgeladenen Motoren dem Umgebungsdruck entspricht, als Verdichtungsdruck $P_2 = P_1 \cdot \varepsilon^\kappa$ ergibt.

Schon bei diesen einfachen Formeln zeigt sich der große Vorteil der Exponentialskalen auf der Rückseite des Stabes. Für $P_1 = 1,00$ ata beschränkt sich die Rechnung auf: C 1 / LL₁₋₃ ε ; Läufer auf C κ ; Resultat auf LL₁₋₃ für den Verdichtungsdruck und für den thermischen Wirkungsgrad auf Bildung der Differenz aus 1 minus dem Wert, der sich durch: C 1 / LL₁₋₃ ε ; Läufer auf C $\kappa - 1$; Resultat auf LL₀₁₋₀₃ ergibt. Es läßt sich also sofort und ohne jede Mühe für die Abhängigkeit des thermischen Wirkungsgrades und des Verdichtungs-Enddruckes vom Verdichtungsverhältnis und dem Adiabatenexponenten eine Tafel aufstellen, aus der man ersieht, daß der Wirkungsgrad im Gebiet kleiner Verdichtungsverhältnisse rasch ansteigt. Bei großen ε ist dagegen nur noch wenig zu gewinnen, während der Verdichtungsdruck und damit der das Triebwerk und die Lager beanspruchende Spitzendruck sehr stark ansteigen. Diese theoretischen Verhältnisse bestätigen sich auch im praktischen Otto-Prozeß.

Die Aufgabe, eine Kolbenmaschine mit bestimmten Betriebseigenschaften zu gestalten, läßt viele Lösungen zu, auch wenn die Fülle der Möglichkeiten durch bestimmte Forderungen z. B. in Bezug auf Gewicht, Bauraum, Herstellungskosten, Drehzahlen usw. eingengt wird. Für die Bestimmung der optimalen Auslegung haben sich Ähnlichkeitsbetrachtungen als sehr fruchtbar erwiesen. Geometrisch ähnlich wären Maschinen gleicher Bauart aber verschiedener Größe, bei denen alle Abmessungen im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Mechanisch ähnlich sind sie aber, wenn der Mitteldruck p_e und die mittlere Kolbengeschwindigkeit c_m gleich sind. Für mechanisch ähnliche Maschinen verschiedener Größe läßt sich mit einer Konstanten k , dem mittleren effektiven Druck p_e , dem Zylinder-Durchmesser d , der mittleren Kolbengeschwindigkeit c_m und dem Hub s die auch als „Modellzahl“ bezeichnete mechanische Schnellläufigkeit

$$n_m = k \cdot p_e^{1/2} \cdot d \cdot c_m^{3/2} \cdot s^{-1}$$

als Kennzahl zur raschen Beurteilung des Einflusses verschiedener Gestaltungsmaßnahmen ableiten. Nach einfacher Umformung:

$$n_m = \frac{k}{s} \sqrt[3]{c_m^3 \cdot d^2 \cdot p_e}$$

läßt sich die mechanische Schnellläufigkeit z. B. für die Aufstellung von Tafeln sehr rasch und mit großer Genauigkeit berechnen:

Läufer auf Rückseite W_1 c_m oder W_2 c_m ; Schieber auf Vorderseite CI c_m unter den Läufer; Resultat unter C 1 oder C 10 auf D.

Damit ist die 3. Potenz von c_m auf dem CASTELL-Novo-Duplex mit der vollen Genauigkeit einer 25 cm-Skala, d. h. mit dreifach höherer Genauigkeit als bei Verwendung der Kubenskala K berechnet. Da das Resultat auf der Grundskala D erscheint, kann ohne Zwischenablesung sofort die Multiplikation mit d^2 und p_e vorgenommen und die Quadratwurzel gefunden werden:

Läufer auf Vorderseite D „Produkt unter der Wurzel“,

Resultat unter dem Läufer auf der Rückseite auf W_1 oder W_2 .

Die anschließende Multiplikation mit k und die Division durch s wird auf den W-Skalen weitergeführt und erreicht damit wieder die hohe Genauigkeit der 50 cm-Einheit.

Eine große Rechenarbeit stellt stets die Umrechnung der Prüfstandsergebnisse von Leistungs- und Brennstoffverbrauchsmessungen an Brennkraftmaschinen auf Normzustände z. B. nach DIN 6270 für ortsfeste Motoren, Schiffsmotoren und Motoren für Schienenfahrzeuge dar, weil die Umrechnungsformeln un bequem sind und stets eine große Zahl von Werten mit möglichst hoher Genauigkeit berechnet werden muß. Der CASTELL-Novo-Duplex gibt hier bei doppelter Genauigkeit gegenüber einem üblichen 25 cm-Stab eine beträchtliche Zeitersparnis.

Das gilt auch schon für die viel einfachere Umrechnungsformel für Kraftfahrzeugmotoren nach DIN 70 020, die von dem Bezugzustand:

$$p_0 = 760 \text{ Torr (auf } 0^\circ \text{ C reduzierter Barometerstand in mm Hg)}$$

$$t_0 = 20^\circ \text{ C}$$

ausgeht und mit:

$$N_{e0} = N_e \frac{760,0}{p} \sqrt{\frac{273,0 + t}{273,0 + 20,0}} \text{ in PS}$$

unter Vernachlässigung der Abhängigkeit des mechanischen Wirkungsgrades vom Umgebungszustand und des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft aus den Meßwerten für den Luftdruck p in Torr und für die Lufttemperatur t in °C für beliebige Betriebsbedingungen auf dem Prüfstand, die vom Bezugszustand p_0 und t_0 abweichen, die „Bezogene Nutzleistung“ N_{e0} angibt.

Man erreicht für den ganzen Rechengang die hohe Genauigkeit einer 50 cm-Einheit, wenn man mit der Wurzel aus dem Temperaturverhältnis beginnt und die anschließenden Multiplikationen und Division auf den W-Skalen fortführt.

Beispiel: Ansaugtemperatur der Luft am Prüfstand $t = 26,2^\circ \text{C}$
 Barometerstand am Prüfstand (bei $26,2^\circ \text{C}$) $p_t = 745,6 \text{ mm Hg}$
 Nutzleistung am Prüfstand $N_e = 174,4 \text{ PS}$

1) Berechnung des reduzierten Barometerstandes in Torr:

$$p = p_t - \frac{t}{8} = 745,6 - 3,3 = 742,3 \text{ Torr}$$

2) Berechnung der „Bezogenen Nutzleistung“ in PS:

$$N_{e0} = 174,4 \frac{760,0}{742,3} \sqrt{\frac{299,2}{293,0}} \text{ PS}$$

Rechengang: Läufer auf W_1 299,2
 Schieber W'_1 293,0 unter den Läufer (anliegende Skala)
 Läufer auf Zwischenresultat unter W'_1 1 = 1,022
 Schieber in Grundstellung bringen
 Läufer auf C 1,022 (Zwischenresultat)
 Schieber W'_2 742,3 unter den Läufer
 Läufer auf W'_2 760,0
 Schieber W'_1 1 unter Läufer
 Läufer auf W_1 174,4
 Endresultat auf W_1 : $N_{e0} = 180,5 \text{ PS}$.

Bei einem Vergleich hat sich gezeigt, daß die Berechnung der „Bezogenen Leistung“ für stationäre Motoren nach DIN 6270 nach einem ähnlichen Schema mit dem CASTELL-
 Novo-Duplex weniger Zeit in Anspruch nimmt, als die abgekürzte Berechnung mit den im DIN-Blatt gegebenen Zahlentafeln, weil das Aufsuchen der Tafelwerte und ihre Auswertung bei der Forderung nach gleicher Genauigkeit mehr Zeit erfordert als das Stabrechnen mit den Wurzelskalen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der neue Rechenstab CASTELL-
 Novo-Duplex durch seine erhöhte Rechengenauigkeit und die zeitsparende Anordnung der Skalen für Berechnungen im Kolbenmaschinenbau hervorragend geeignet ist.

Auflösung quadratischer Gleichungen mit dem Rechenstab

von Dr. Josef Laub

1) Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c und $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ läßt sich auf $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Koeffizienten p, q umformen, wenn man $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$ setzt.

Für die Lösungen x_1, x_2 dieser Gleichung gilt:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad (\text{Satz von VIETA}) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{und } x_1 x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} \dots \dots \dots (2)$$

2) Der Radikand $\Delta = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q$ wird als DISKRIMINANTE der quadratischen Gleichung bezeichnet; von Δ hängt die Art der Lösungen x_1, x_2 ab.

Fall I: $\Delta < 0$, daher $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 < q$; die Lösungen x_1, x_2 sind konjugiert komplex.

Fall II: $\Delta = 0$, somit $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 = q$; es ist $x_1 = x_2$ (reell).

Fall III: $\Delta > 0$, folglich $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 > q$; es gilt $x_1 \neq x_2$ (reell).

3) a) Man kann unter Umständen auf Grund einer Kopfrechnung entscheiden, welcher der drei Fälle bei einer vorgelegten quadratischen Gleichung vorliegt. Nur wenn $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 \approx q$ ist, wird man manchmal mit einer Kopfrechnung nicht zum Ziel kommen; in einem solchen Fall kann man den Rechenstab zur Entscheidung heranziehen.

b) $p < 0$: Man stellt den Mittelstrich des Läufers über $\left(-\frac{p}{2}\right)$ der Skala D (Fig. 1). Der Mittelstrich des Läufers gibt dann auf der Skala A den Wert $\left(-\frac{p}{2}\right)^2$ an. Nun kann man, ohne den Läufer bewegen zu müssen, entscheiden, welcher der drei Fälle vorliegt.

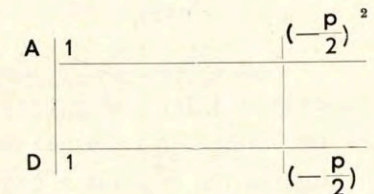


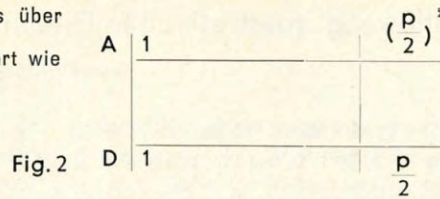
Fig. 1

c) $p > 0$: Nun ist $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 < 0$, und der Logarithmus von $\left(-\frac{p}{2}\right)$ ist nicht reell! Wegen $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ formt man (2) um in

$$x_1 x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \dots \dots \dots (3)$$

*) Die Fälle, in denen mindestens einer der drei Koeffizienten gleich Null ist, sind trivial und werden bei den folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt.

stellt den Mittelstrich des Läufers über $\frac{p}{2}$ der Skala D (Fig. 2) und verfährt wie in b).



4) **Fall I:** Sind $x_1 = \alpha + \beta i$, $x_2 = \alpha - \beta i$ (α, β reell) die Lösungen, so gilt wegen (1): $p = -2\alpha$ und $q = \alpha^2 + \beta^2$. Der Wert von q ist somit sicher > 0 .

Wegen $(-\frac{p}{2})^2 < q$ wird man (2) umformen in

$$ix_2 = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - (-\frac{p}{2})^2}, p < 0, \dots \dots \dots (4a)$$

bzw.

$$ix_2 = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - (\frac{p}{2})^2}, p > 0, \dots \dots \dots (4b)$$

a) **Beispiel 1:** $x^2 - 6,92x + 12,65 = 0$

a) Man stellt den Mittelstrich des Läufers über 3,46 ($= -\frac{p}{2}$) der Skala D. Auf der Skala A kann man leicht feststellen, daß der Fall I vorliegt.

β) **Durchführung der Rechnung:**

$$q = 12,65$$

$$(-\frac{p}{2})^2 = 11,97 \text{ (wegen der größeren Genauigkeit auf der Skala D berechnet!)}$$

$$\Delta = 0,68$$

$$\sqrt{\Delta} = 0,824$$

$$x_1 = 3,46 + 0,82 \cdot i, \quad x_2 = 3,46 - 0,82 \cdot i$$

b) **Beispiel 1b:** $x^2 + 6,92x + 12,65 = 0$

Diesmal ist $(-\frac{p}{2}) < 0$, man verwendet daher (4b) und verfährt sonst wie in 4a).

$$\text{Ergebnis: } x_1 = -3,46 + 0,82 \cdot i, \quad x_2 = -3,46 - 0,82 \cdot i$$

5) **Fall II:** Es ist $(-\frac{p}{2})^2 = q$. Für die Lösungen gilt:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

6) **Fall III:** Für die Lösungen gibt es folgende vier Möglichkeiten:

- a) $x_1 > 0, x_2 > 0$; es ist dann $p < 0, q > 0$.
- b) $x_1 < 0, x_2 < 0$; es folgt $p > 0, q > 0$.
- c) $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 > |x_2|$. Aus (1) folgt: $p < 0, q < 0$.
- d) $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 < |x_2|$. Aus (1) folgt: $p > 0, q < 0$.

7) **Fall IIIa:** $x^2 + px + q = 0$ mit $p < 0, q > 0$.

a) Das Lösen der Gleichung kann mit der Skala D und der Skala CI in folgender Weise vorgenommen werden:

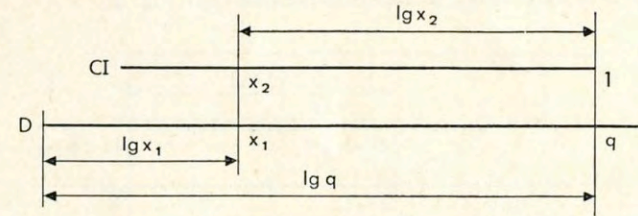


Fig. 3

Man stellt 1 der Skala CI über q der Skala D ein (Fig. 3). Dadurch ist gewährleistet, daß $x_1 \cdot x_2 = q$ ist. Nun hat man die Werte x_1, x_2 so zu ermitteln, daß $x_1 + x_2 = -p$ ist. Aus Gründen der Übersicht ist es zweckmäßig, eine Tabelle anzulegen, wie es ersichtlich ist auf dem folgenden

Beispiel 2a: $x^2 - 6,87x + 7,46 = 0$

CI	x_2	7,46	4,98	5,33	5,41	5,49	5,52
D	x_1	1,00	1,50	1,40	1,38	1,36	1,352
	$x_1 + x_2$	8,46	6,48	6,73	6,79	6,85	6,872

Gemäß Fig. 3 stellt man den Mittelstrich des Läufers über x_1 der Skala D, liest auf CI den Wert x_2 ab, trägt beide Werte in eine Tabelle ein und bildet $x_1 + x_2$. Die Lösungen sind dann ermittelt, wenn $x_1 + x_2 = 6,87$ ist. Die ersten drei Einstellungen in diesem Beispiel dienen dem Überblick, um den Bereich festzustellen, in dem die Lösungen liegen.

Lösungen: $x_1 = 1,35, x_2 = 5,52$.

b) In manchen Fällen ist folgende Einstellung erforderlich (Fig. 4):

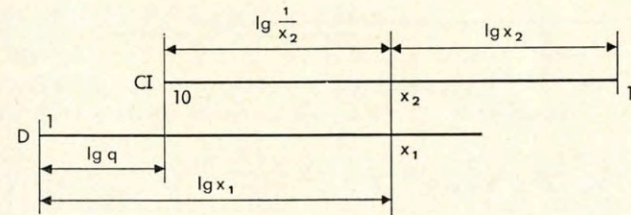


Fig. 4

Aus der Figur 4 entnimmt man: $\lg x_1 - \lg \frac{1}{x_2} = \lg (x_1 \cdot x_2) = \lg q$ bzw.

$$\lg x_1 + \lg x_2 - \lg 10 = \lg (x_1 \cdot x_2) - \lg 10 = \lg q - \lg 10$$

Beispiel 2b: $x^2 - 11,3x + 20,1 = 0$

CI	x_2	4,0	2,9	2,5	2,4	2,34	2,32	2,24	2,21
D	x_1	5,0	7,0	8,0	8,5	8,60	8,70	9,00	9,10
	$x_1 + x_2$	9,0	9,9	10,5	10,9	10,94	11,02	11,24	11,31

Lösungen: $x_1 = 9,10, x_2 = 2,21$.

8) **Fall IIIb:** $x^2 + px + q = 0$ mit $p > 0, q > 0$.

Beide Lösungen sind negativ. Es gilt $q = x_1 \cdot x_2 = |x_1| \cdot |x_2|$. Es ist $|x_2| = \frac{q}{|x_1|}$

a) Das Ermitteln der Werte $|x_1|, |x_2|$ entnimmt man aus Fig. 5:

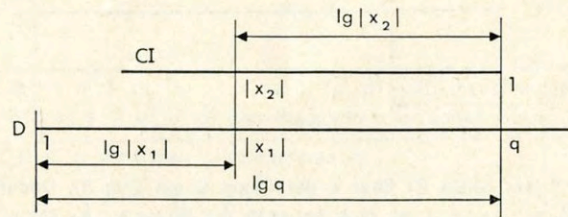


Fig. 5

Beispiel 3a: $x^2 + 6,35x + 8,92 = 0$

CI	$ x_2 $	2,2	2,12	2,10
D	$ x_1 $	4,0	4,20	4,25
	$x_1 + x_2$	- 6,2	- 6,32	- 6,35

Lösungen: $x_1 = -4,25, x_2 = -2,10$

b) Manchmal führen folgende Einstellungen zum Ziel (Fig. 6):

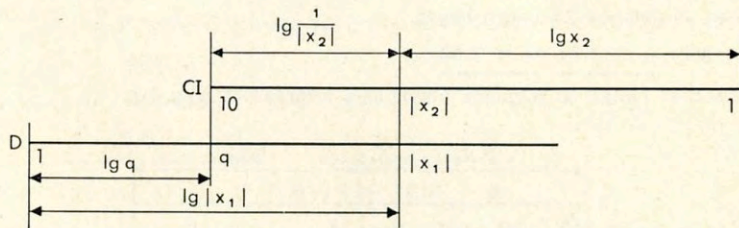


Fig. 6

Beispiel 3b: $x^2 + 7,6x + 11,8 = 0$

CI	$ x_2 $	4,7	5,36	5,46	5,43
D	$ x_1 $	2,5	2,20	2,16	2,17
	$x_1 + x_2$	- 7,2	- 7,56	- 7,62	- 7,60

Lösungen: $x_1 = -2,17, x_2 = -5,43$

9) **Fall IIIc:** $x^2 + px + q = 0$ mit $p < 0, q < 0$.

Es ist $x_1 \cdot |x_2| = |q|$, bzw. $|x_2| = \frac{|q|}{x_1}$.

a) Die Einstellungen der Werte $x_1, |x_2|$ entnimmt man aus Fig. 7:

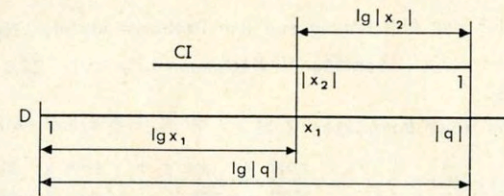


Fig. 7

Beispiel 4a: $x^2 - 1,5x - 8,2 = 0$

CI	$ x_2 $	2,05	2,16	2,22	2,205
D	x_1	4,00	3,80	3,70	3,710
	$x_1 + x_2$	1,95	1,64	1,48	1,505

Lösungen: $x_1 = 3,71, x_2 = -2,21$

b) Es können auch folgende Einstellungen erforderlich sein (Fig. 8):

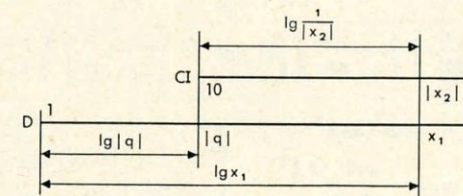


Fig. 8

Beispiel 4b: $x^2 - 3,52x - 26,3 = 0$

CI	$ x_2 $	3,76	3,50	3,60	3,65	3,66
D	x_1	7,00	7,50	7,30	7,20	7,18
	$x_1 + x_2$	3,24	4,00	3,70	3,55	3,52

Lösungen: $x_1 = 7,8, x_2 = -3,66$

10) **Fall III d:** $x^2 + px + q = 0$ mit $p > 0, q < 0$.

a) **Beispiel 5a:** $x^2 + 4,34x - 5,61 = 0$

Die Einstellung der Werte $x_1, |x_2|$ ist aus Fig. 7 ersichtlich:

CI	$ x_2 $	5,6	5,1	5,35	5,40	5,380
D	x_1	1,0	1,1	1,05	1,04	1,042
	$x_1 + x_2$	- 4,6	- 4,0	- 4,30	- 4,36	- 4,338

Lösungen: $x_1 = 1,04, x_2 = -5,38$

b) **Beispiel 5b:** $x^2 + 4,13x - 13,5 = 0$

Wegen der Einstellung der Werte $x_1, |x_2|$ siehe Figur 8!

CI	$ x_2 $	6,75	6,43	6,25	6,30	6,28
D	x_1	2,00	2,10	2,16	2,14	2,15
	$x_1 + x_2$	- 4,75	- 4,33	- 4,09	- 4,16	- 4,13

Lösungen: $x_1 = 2,15, x_2 = -6,28$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen am Rechenstab

(Fortsetzung und Schluß der Abhandlung aus den Rechenstabbriefen Nr. 3, 4, 5 und 6)

von Ing. H. Bachmann

Der Hyperbelcotangens einer komplexen Zahl

$$\coth(x + jy) = \frac{1}{\tanh(x + jy)} = \frac{\cosh x \cdot \cos y + j \sinh x \cdot \sin y}{\sinh x \cdot \cos y + j \cosh x \cdot \sin y}$$

Zähler und Nenner mit $\sinh x \cdot \cos y - j \cosh x \cdot \sin y$ multipliziert:

$$\coth(x + jy) = \frac{\cosh x \cdot \sinh x - j \sin y \cdot \cos y}{\sinh^2 x \cdot \cos^2 y + \cosh^2 x \cdot \sin^2 y}$$

In ähnlicher Weise wie beim $\tanh(x + jy)$ erhält man schließlich:

$$\coth(x + jy) = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x - \cos 2y} - j \frac{\sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y} = A_{CT} - j B_{CT} = C_T / \Delta$$

$$C_T = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{\cosh 2x + \cos 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}}; \tan \Delta = -\frac{\sin 2y}{\sinh 2x}$$

Beispiel:

$$\coth(0,76 - j 0,18) = \coth(48,4^\circ - j 11,5^\circ)$$

$$= \frac{\sinh 96,8^\circ}{\cosh 96,8^\circ - \cos 23^\circ} - j \frac{-\sin 23^\circ}{\cosh 96,8^\circ - \cos 23^\circ}$$

$$\cosh 96,8^\circ // y 2,39; \sin(100 - 23)^\circ // Y 0,935; 2,39 - 0,935 = 1,455$$

$$\sinh 96,8^\circ / Y 1 // \text{Läufer auf } y 1,455; \text{Schiebergrundstellung} // \frac{1}{y} 1,496 = A_{CT}$$

$$\sin 23^\circ / y 1,455 // y 0,1 / Y 0,243 = B_{CT}$$

$$\coth(0,76 - j 0,18) = 1,496 + j 0,243 = 1,512 / 10,25^\circ$$

Das Argument des komplexen Hyperbel-Cotangens

$$\text{ar coth}(C_T / \Delta) = x + jy$$

$$\text{Es gilt } C_T = \sqrt{\frac{\cosh 2x + \cos 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}} \text{ und } \frac{A_{CT}}{C_T} = \cos \Delta$$

In ähnlicher Weise wie bei der Ermittlung des komplexen Tangens erhält man:

$$\tanh 2x = \frac{2 C_T \cos \Delta}{1 + C_T^2} \text{ und } \tan 2y = -\frac{2 C_T \sin \Delta}{1 - C_T^2}$$

Beispiel:

$$\text{ar coth}(1,512 / 10,25^\circ); C_T = 1,512; C_T^2 = 2,28$$

$$1 + C_T^2 = 3,28; 1 - C_T^2 = -1,28$$

$$\tanh 2x = \frac{3,024 \cdot \cos 10,25^\circ}{3,28} = 0,908; 2x = 96,8^\circ; x = 48,4^\circ$$

$$y 3,28 / \sin(100 - 10,25)^\circ // y 3,024 / Y 0,908; y 0,908 // \tanh 96,8^\circ$$

$$\tan 2y = \frac{3,024 \cdot \sin 10,25^\circ}{-1,28} = -0,378; 2y = -23^\circ; y = -11,5^\circ$$

$$y 1,28 / \sin 10,25 // y 3,024 / \tan 23^\circ$$

$$\text{ar coth}(1,512 / 10,25^\circ) = 48,4^\circ - j 11,5^\circ = 0,76 - j 0,18$$

Der Cotangens einer komplexen Zahl

$$\cot(x + jy) = \frac{1}{\tan(x + jy)}; \text{es gilt: } \coth ju = -j \cot u; \cot u = \frac{\coth ju}{j}$$

$$\text{und damit: } \cot(x + jy) = -\frac{\coth(-y + jx)}{j} = -\frac{-\sinh 2y - j \sin 2x}{j(\cosh 2x - \cos 2y)}$$

In bekannter Weise Zähler und Nenner mit $-j$ multipliziert, erhält man schließlich:

$$\cot(x + jy) = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x} - j \frac{\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x} = A_{ct} - j B_{ct} = c_t / \vartheta$$

$$c_t = \frac{c}{s} = \sqrt{\frac{\cosh 2y + \cos 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}}; \tan \vartheta = \frac{B_{ct}}{A_{ct}} = -\frac{\sinh 2y}{\sin 2x}$$

Beispiel:

$$\cot(0,5 + j 0,67) = \cot(31,8^\circ + j 42,7^\circ)$$

$$= \frac{\sin 63,6^\circ}{\cosh 85,4^\circ - \cos 63,6^\circ} - j \frac{\sinh 85,4^\circ}{\cosh 85,4^\circ - \cos 63,6^\circ}$$

$$\sin(100 - 63,6)^\circ / Y 0,541; \cosh 85,4^\circ / y 2,04; 2,04 - 0,541 = 1,499$$

$$\sin 63,6^\circ / y 1,499 // y 0,1 / Y 0,561 = A_{ct}$$

$$\sinh 85,4^\circ / Y 1 // \text{Läufer auf } y 1,499, \text{Schiebergrundstellung} // \frac{1}{y} 1,19 = B_{ct}$$

$$\cot(0,5 + j 0,67) = 0,561 - j 1,190 = 1,31 / -72,1^\circ$$

$$\text{oder: } \cosh 2y = \cosh 85,4^\circ = 2,04; C_t = \sqrt{\frac{2,04 + 0,541}{2,04 - 0,541}} = 1,31$$

$$\cos 2x = \cos 63,6^\circ = 0,541; \sinh 2y = \sinh 85,4^\circ = 1,78; \tan \vartheta = -\frac{1,78}{0,84} = -2,12$$

$$\sin 2x = \sin 63,6^\circ = 0,84; \vartheta = -72,1^\circ$$

$$\cot(0,5 + j 0,67) = 1,31 / -72,1^\circ$$

Das Argument des komplexen Cotangens

$$\text{arc cot}(c_t / \vartheta) = x + jy$$

$$\text{Es gilt } c_t = \sqrt{\frac{\cosh 2y + \cos 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}} \text{ und } \frac{A_{ct}}{C_t} = \cos \vartheta$$

In ähnlicher Weise wie bei der Ermittlung des komplexen Tangens erhält man:

$$\tan 2x = -\frac{2 c_t \cos \vartheta}{1 - c_t^2} \text{ und } \tanh 2y = -\frac{2 c_t \sin \vartheta}{1 + c_t^2}$$

Beispiel:

$$\text{arc cot } (1,31 / -72,1^{\circ}); \quad c_t = 1,31; \quad c_t^2 = 1,72$$

$$1 + c_t^2 = 2,72; \quad 1 - c_t^2 = -0,72$$

$$\tan 2x = \frac{2,62 \cdot \cos 72,1^{\circ}}{-0,72} = +1,55; \quad 2x = 63,6^{\circ}; \quad x = 31,8^{\circ}$$

$$y = 0,72 / \sin (100 - 72,1)^{\circ} // y = 2,62 / Y = 1,55;$$

$$\tanh 2y = \frac{-2,62 \cdot \sin 72,1^{\circ}}{2,72} = +0,872; \quad 2y = 85,4^{\circ}; \quad y = 42,7^{\circ}$$

$$y = 2,72 / \sin 72,1^{\circ} // y = 2,62 / Y = 0,872; \quad y = 0,872 // \tanh 85,4^{\circ}$$

$$\text{arc cot } (1,31 / -72,1) = 31,8^{\circ} + j 42,7^{\circ} = 0,5 + j 0,67$$

Anwendung

Ermittle die Fortpflanzungskonstante γ einer leerlaufenden Leitung von 50 km Länge bei einem Eingangswiderstand $Y_0 = 329 / -28,3^{\circ}$ und einem Wellenwiderstand

$$\tilde{\sigma}_0 = 723 / -12^{\circ}. \quad \frac{Y_0}{\tilde{\sigma}_0} = \coth(\gamma \cdot l) = \frac{329 / -28,3^{\circ}}{723 / -12^{\circ}} = 0,455 / -16,3^{\circ}$$

Um das Argument (γl) zu finden, schreibt man:

$$\text{ar coth } (0,455 / -16,3^{\circ}) = x + jy$$

Hierfür gilt:

$$\tanh 2x = \frac{2C_T \cos \Delta}{1 + C_T^2} \quad \text{und} \quad \tan 2y = \frac{2C_T \sin \Delta}{1 - C_T^2}$$

$$C_T = 0,455; \quad C_T^2 = 0,207; \quad 1 + C_T^2 = 1,207; \quad 1 - C_T^2 = 0,793$$

$$\tanh 2x = \frac{0,91 \cdot \cos(-16,3^{\circ})}{1,207} = 0,73; \quad 2x = 59,2^{\circ}; \quad x = 29,6^{\circ}$$

$$y = 1,207 / \sin(100 - 16,3)^{\circ} // y = 0,91 / Y = 0,73; \quad y = 0,73 // \tanh 59,2^{\circ}$$

$$\tan 2y = \frac{0,91 \cdot \sin(-16,3^{\circ})}{0,793} = -0,291; \quad 2y = -18^{\circ} \text{ bzw. } +182^{\circ}; \quad y = 91^{\circ}$$

$$y = 0,793 / \sin(-16,3)^{\circ} // y = 0,91 / \tan 18^{\circ}$$

$$\text{ar coth } (0,455 / -16,3^{\circ}) = 29,6^{\circ} + j 91^{\circ} = 0,465 + j 1,43 = 1,5 / 80^{\circ}$$

$$\text{Mit } \gamma \cdot l = 1,5 / 80^{\circ} \text{ erhält man: } \gamma = \frac{1,5 / 80^{\circ}}{50} = 0,03 / 80^{\circ}$$

Bemerkung:

Um Irrtümer zu vermeiden und um bei mehrdeutigen Lösungen einen Überblick über die möglichen Lösungen zu geben, ist auf den folgenden beiden Seiten eine Zusammenstellung aller Formeln für die komplexen Kreis- und Hyperbelfunktionen mit den Vorzeichen des Real- und Imaginärteiles in den einzelnen Quadranten aufgenommen worden. In der untersten Zeile dieser Formelzusammenstellung ist die Periodizität dieser Funktionen angeführt.

Argument gegeben; Funktion gesucht		Funktion gegeben; Argument gesucht	
\underline{L}	x	y	A
I	+	+	+
II	-	+	-
III	-	-	-
IV	+	-	+
$s / \underline{\sigma} = A_s + j B_s = \sin(x + jy)$			
$A_s = \sin x \cdot \cosh y$		$\sin x = \frac{A_s^2 + B_s^2 + 1}{2}$	
$B_s = \cos x \cdot \sinh y$		$\cosh y = \frac{A_s}{\sin x}$ bzw. $\frac{B_s}{\cos x}$	
$S / \underline{\zeta} = A_s + j B_s = \sinh(x + jy)$			
$A_s = \sinh x \cdot \cos y$		$\sinh x = \frac{A_s^2 + B_s^2 + 1}{2}$	
$B_s = \cosh x \cdot \sin y$		$\cosh x = \frac{B_s}{\sin y}$ bzw. $\frac{A_s}{\cos y}$	
$c / \underline{\gamma} = A_c - j B_c = \cos(x + jy)$			
$A_c = \cos x \cdot \cosh y$		$\cos x = \frac{A_c^2 + B_c^2 + 1}{2}$	
$B_c = \sin x \cdot \sinh y$		$\cosh y = \frac{A_c}{\cos x}$ bzw. $\frac{B_c}{\sin x}$	
$C / \underline{I} = A_c + j B_c = \cosh(x + jy)$			
$A_c = \cosh x \cdot \cos y$		$\cosh x = \frac{A_c^2 + B_c^2 + 1}{2}$	
$B_c = \sinh x \cdot \sin y$		$\cos y = \frac{A_c}{\cosh x}$ bzw. $\frac{B_c}{\sinh x}$	

Periodizität: $k = 1, 2, 3, \dots$

Für $x \approx \pm 2k\pi$ gilt: $\sin(x + jy) = \sin(x \pm 2k\pi + jy) = \sin(x \pm 2k\pi) \cosh y \pm j \cos(x \pm 2k\pi) \sinh y$

Für $y \approx \pm 2k\pi$ gilt: $\sinh(x + jy) = \sinh(x + j(\pm 2k\pi + y)) = \sinh(x + j\pm 2k\pi) \cosh y \pm j \cosh(x + j\pm 2k\pi) \sinh y$

$$\text{oder } Y = \left(\frac{60 \cdot \left(\frac{21}{17} \right)^{2/3}}{2,86} \right)^2 = 581$$

K' 17 / K 21; Läufer auf B 60

B 2,86 unter Läuferstrich

über B 1 erhält man 24,1 auf A

D 24,1 / A 581

Damit wird $J = 1 : Y = 1 : 581$

Benutzt man in den beiden hier angeführten Beispielen für den letzten Rechengang die C-Skala, so erhält man gleichzeitig J im Prozent- oder im Tangensverhältnis.

C 0,415 / B 0,00172 oder BI 581 bzw.

C 24,1 / B 581 oder BI 0,00172

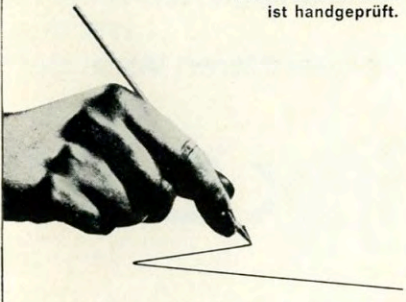
Wichtige Messe-Hinweise

Bitte besuchen Sie den A. W. FABER-CASTELL-Stand auf folgenden Ausstellungen:

7. DIDACTA 7.6.—11.6.63 NÜRNBERG

Im Messehaus 1, 1. Obergeschoß, Stand Nr. 1140, zeigen Ihnen unsere Mitarbeiter die neuesten Erzeugnisse unseres Hauses.

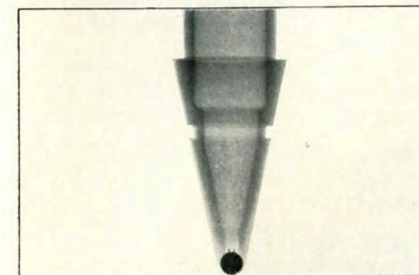
Lehrmittelausstellung anlässlich der 29. Tagung zur Pflege des Zusammenhanges zwischen Universität und Höherer Schule, Münster/Westfalen, Universität (Schloß), 7. und 8. Juni 1963.



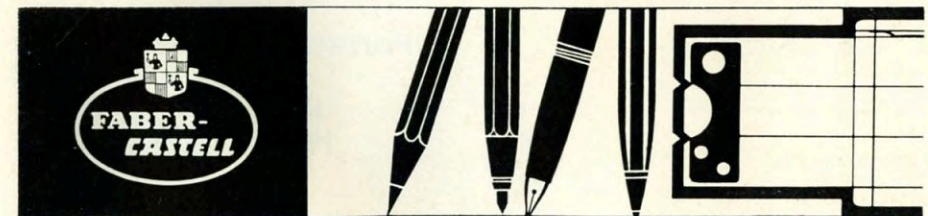
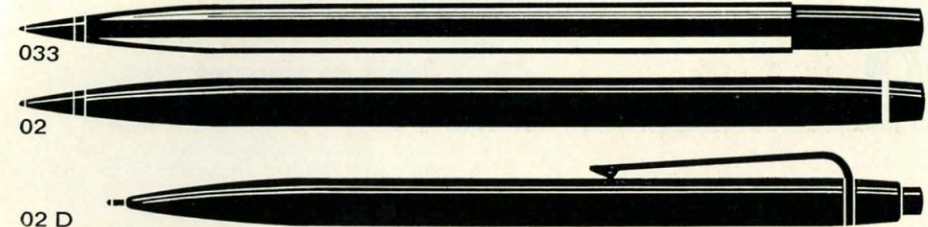
Jede einzelne Faber-Castell-Mine ist handgeprüft.

Ein Kugelschreiber muß einiges leisten!

Die Mine ist die Seele des Kugelschreibers; auf sie kommt es an.



Wir haben die Spitze der Faber-Castell-Mine röntgen lassen. Schauen Sie sich das Röntgenbild an: diese Präzision gewährleistet unermüdliche Schreibfähigkeit. - Die Leistung dieser Spitze ist Spitzenleistung.



A. W. FABER-CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

A. 460 K